درس ششم : گروه های پیوسته یا گروه های توپولوژیک

۱ مقدمه

دردرس گذشته با گروه های ماتریسی آشنا شدیم. این گروه ها، نمونه های مهمی از گروه های پیوسته هستند به این معنا که می توان باتغییر پیوسته یک یاچند پارامتر درفضای گروه گردش کرد. گروه Z، Z_n ، یا S_n نمونه هایی ازگروه های ناپیوسته هستند که درآنها چنین امکانی وجود ندارد. دراین درس و درس های آینده می خواهیم کمی بیشتر راجع به مفهوم پیوستگی و پارامترهای یک گروه صحبت کنیم. به این ترتیب با مفاهیم مهمی مثل گروه های توپولوژیک و گروه های لی آشنا خواهیم شد. پیشاپیش تذکر می دهیم که بحث مادراین جا یک بحث کامل نیست زیرا نه مفهوم توپولوژی ونه مفهوم خمینه را درکلیت خود معرفی نخواهیم کرد. پرداختن به چنین کاری هم وقت گیراست و هم کم اثراست زیرا می توانیم بسیاری از خواص گروه های توپولوژیک و گروه های لی را تنها با تعریف های شهودی از آنها بدست آورد و ما هم به همین تعاریف شهودی و حسی بسنده خواهیم کرد.

۲ گروه پیوسته یا گروه توپولوژیک

۱.۲ مفهوم پیوستگی

تعریف: مجموعه M یک فضای متریک خوانده می شود هرگاه به ازای هردونقطه آن مثل x و y بتوان عددی مثل $d(x,y)$ چنان تعریف کرد:

$$\begin{aligned} &d(x,y) \geq 0 \\ &d(x,x) = 0 \\ &d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \end{aligned} \tag{1}$$

نامساوی آخری نامساوی مثلث نام دارد. درچنین حالتی معمولاً می نویسیم که (M,d) یک فضای متریک است. روی یک مجموعه می توان مترهای مختلف تعریف کرد. مثالهایی از فضای متریک درزیرآمده است . درهرمورد دانشجو خود باید تحقیق کند که مترداده شده واقعاً درخواص بالا صدق می کند:

الف: $M = R$،

$$d := |x-y|$$

.

ب: $M=R^n$،

$$d_1(x,y) := (|(x_1-y_1|+|x_2-y_2|+\cdots+|x_n-y_n|)$$

$$d_2(x,y) := \left((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

پ: M فضای ماتریس های حقیقی مربعی با بعد n است و به ازای هردوماتریس مربعی A,B متعلق به M:

$$d(A,B) := ||A-B|| \tag{2}$$

که درآن $||x|| = tr(x^t x)^{\frac{1}{2}}$.

ت: M فضای ماتریس های مختلط مربعی با بعد n است و به ازای هردوماتریس مربعی A,B متعلق به M:

$$d(A,B) := ||A-B|| \tag{3}$$

که درآن $||x|| = tr(x^\dagger x)^{\frac{1}{2}}$.

ج: M فضای توابع حقیقی که دربازه $(a,b)\subset R$ تعریف شده اند. به ازای هردو تابع $f,g\in M$:

$$d(f,g) := sup_{x\in(a,b)}|f-g|$$

چ: M فضای توابع حقیقی وانتگرال پذیر که دربازه $(a,b)\subset R$ تعریف شده اند. به ازای هردو تابع $f,g\in M$:

$$d(f,g) := ||f-g||,$$

که درآن $||h||^2 := \int_a^b h^2(x)dx$.

ح: M هرمجموعه دلخواه و

$$d(x,y) = 1 \quad if \;\; x \neq y, \quad d(x,x) = 0. \tag{4}$$

درهرکدام از مجموعه های بالا می توان به نزدیکی و دوری نقاط از یکدیگر معناومفهوم داد. به طورخاص می توان کره بازی به شعاع ϵ راحول هرنقطه $x \in M$ به شکل زیرتعریف کرد:

$$B_\epsilon(x) := \{y \in M | d(x,y) < \epsilon\}. \tag{5}$$

می توان هم چنین ناحیه های باز و ناحیه های بسته را تعریف کرد. به عنوان مثال یک ناحیه $U \subset M$ بازاست اگر بتوان حول هرنقطه آن یک کره باز به شعاع مناسب حول آن چنان رسم کرد که تمام کره باز دردرون U قرارگیرد: به زبان دیگر U یک ناحیه بازاست اگر

$$\forall x \in U, \exists \epsilon > 0 | B_\epsilon(x) \subset U. \tag{6}$$

ناحیه ای بسته است که متمم آن بسته باشد. یعنی $U \subset M$ بسته است اگر $M - U$ بازباشد.
بااستفاده از این مفاهیم می توان قضایای بسیاری را درمورد ناحیه های بازوبسته ثابت کرد، قضایایی که ازنظرشهودی نیز بدیهی هستند. به عنوان مثال خواننده می تواند براحتی قضیه زیررا ثابت کند:

قضیه: اگر (M,d) یک فضای متریک باشد، آنگاه

الف: اجتماع هرتعداد زیرمجموعه بازاز M بازهم یک مجموعه بازخواهد بود.

ب: اشتراک تعداد محدودی زیرمجموعه باز از M بازهم یک مجموعه بازخواهد بود.

حال می توانیم به تعریف پیوستگی یک تابع بپردازیم. ازنظر شهودی یک تابع را پیوسته می خوانیم اگر نقاط نزدیک را به نقاط نزدیک بنگارد. به این معنا که هرچقدربخواهیم بتوانیم بانزدیک کردن نقطه $x \in M$ به نقطه $y \in M$ ، مقدار تابع $f(x)$ رابه مقدار $f(y)$ نزدیک کنیم . بیان ریاضی این عبارت درتعریف زیرآمده است:

تعریف: یک تابع $f : (M,d) \longrightarrow (M',d')$ پیوسته خوانده می شود اگر

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 | \;\; d(x,y) < \delta \longrightarrow d'(f(x), f(y)) < \epsilon. \tag{7}$$

به عنوان مثال درفضای ماتریس ها توابع جمع دوماتریس، ضرب دوماتریس و یا وارون گرفتن از یک ماتریس توابع پیوسته هستند. هم چنین توابعی نظیر دترمینان و ردّ پیوسته هستند.

حال به تعریف هم بند بودن یایکپارچه بودن یک فضای متریک (درحالت کلی فضای توپولوژیک) می پردازیم.

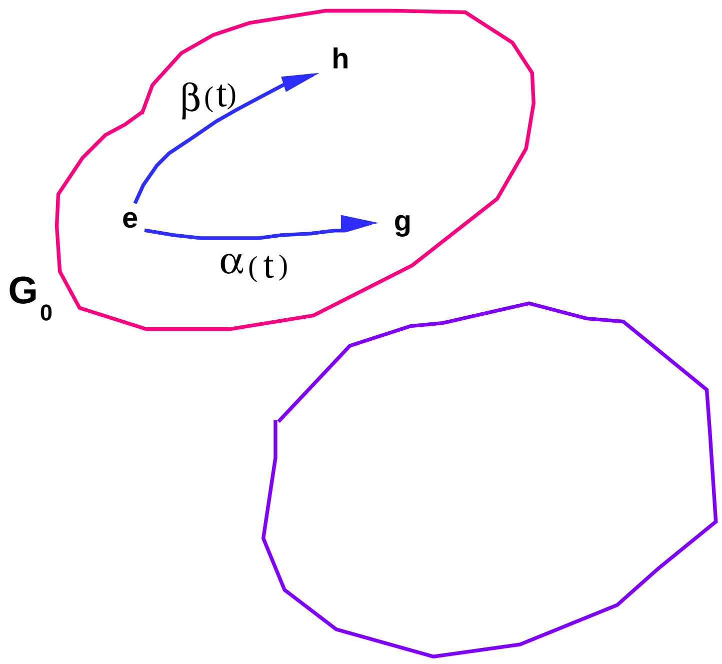
تعریف: یک فضای متریک (درحالت کلی یک فضای توپولوژیک) M همبند مسیری است اگر هردونقطه آن مثل $x, y \in M$ را بتوان با یک منحنی پیوسته به یکدیگر مرتبط کرد، یعنی اگر یک نگاشت پیوسته $\gamma : R \longrightarrow M$ بتوان چنان تعریف کرد که $\gamma(0) = x$ و $\gamma(1) = y$.

یک فضای هم بند مسیری تماماً یک پارچه است و ازدوقست مجزاتشکیل نشده است. باید متذکرشویم که هم بند مسیری بودن کمی از همبند بودن (که به معنای یک پارچه بودن است) قوی تراست ولی ما به تعریف همبند مسیری بودن و استفاده از آن اکتفا می کنیم.

آنچه که تاکنون گفته ایم کلی ترین تعریف پیوستگی نیست. کلی ترین تعریف با استفاده از تعریف توپولوژی روی یک مجموعه امکان پذیرمی شود. مثل هرانتزاع دیگری درریاضیات این کاربا انتزاع خواص ساختارهای به ظاهرمتفاوتی که قبلا معرفی شده اند (دراین جا ناحیه های باز) ایجاد می شود. همانطورکه درمقدمه گفتیم مادراین درس به کلی ترین تعریف پیوستگی نمی پردازیم. برای منظورمامطالب ومثالهایی که دربالاگفته شد کافی است. ازاین به بعد نیز اگر ازفضای توپولوژیک سخن بگوییم خواننده می تواند به عنوان مثال مشخصی ازآن فضای متریک را درنظر آورد.
بااین مقدمات ما می توانیم یک گروه پیوسته یاگروه توپولوژیک راتعریف کنیم.

تعریف: یک گروه G ، گروه توپولوژیک خوانده می شود اگر G به عنوان یک مجموعه یک فضای توپولوژیک باشدو علاوه برآن توابعی که ضرب و وارون را درگروه مشخص می کنند نیزپیوسته باشند. به زبان دیگر اگر ضرب گروه را با نگاشت $m : G \times G \longrightarrow G$ و وارون را بانگاشت $i : G \longrightarrow G$ نشان دهیم این دو تابع می بایست پیوسته باشند.
این تعریف بیان می کند که اگرزوج (g_1, g_2) نزدیک زوج (h_1, h_2) باشد، g_1g_2 نیز می بایست نزدیک h_1h_2 باشد. هم چنین اگر g نزدیک h باشد، g^{-1} نیز می بایست نزدیک h^{-1} باشد.

خواننده می تواند براحتی تشخیص دهد که همه گروه های ماتریسی که درفصل قبل معرفی کرده ایم بامتریک استانداردی که برای فاصله ماتریس ها درنظرمی گیریم گروه های توپولوژیک هستند.



شکل ۱: G_0 قسمتی از گروه است که با عنصر واحد همبند مسیری است.

۳ چند قضیه درباره گروه های پیوسته

پس ازآشنایی با گروه های توپولوژیک می توانیم قضایای ساده ودرعین حال مهمی را درباره این گروه ها ثابت کنیم. مصداق هایی از این قضایا رادرمورد گروه های ماتریسی دردرس گذشته دیده ایم. مثلاً دیدیم که زیرگروه $SO(n)$ ازگروه $O(n)$ گروه است و قسمت دیگر گروه $O(n)$ که شامل ماتریس های بادترمینان -1 است یک زیرگروه نیست. شبیه به این خاصیت را درمورد گروه لورنتز نیزدیدیم. حال می توانیم یک قضیه کلی ثابت کنیم که ربطی به ساختار جزیی گروه ندارد و تنهابه خواص پیوستگی آن مربوطاست.

قضیه: دریک گروه توپولوژیک، آن قسمت ازگروه که همبند مسیری با عنصر واحد است تشکیل یک زیرگروه می دهد.

اثبات: شکل (۱) را درنظربگیرید. قسمت G_0 تکه ای از گروه است که با عنصر واحد همبند مسیری است یعنی قسمتی ازگروه است که تمام اعضایش با منحنی های پیوسته به عنصر واحد متصل هستند. می خواهیم ثابت کنیم که این قسمت یک زیرگروه است. دوعنصر g و h رادراین قسمت درنظربگیرید.

چون این قسمت به طور پیوسته به عنصر واحد متصل است می توانیم دو مسیر $\alpha,\beta:[0,1]\longrightarrow G_0$ پیداکنیم به نحوی که:

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= e, \qquad \alpha(1) = g, \\ \beta(0) &= e, \qquad \beta(1) = h. \end{aligned} \tag{8}$$

حال باید ثابت کنیم که عنصر gh نیز در G_0 است. برای این کار باید ثابت کنیم که یک مسیر پیوسته از e به gh

وجود دارد. هرگاه نگاشت ضرب در G را با $m : G \times G \longrightarrow G$ نشان دهیم آنگاه منحنی زیررا درنظرمی گیریم:

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow G, \qquad \gamma(t) := m(\alpha(t), \beta(t)) \tag{9}$$

این نگاشت با توجه به پیوسته بودن m و α و β یک نگاشت پیوسته است. هم چنین

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= m(\alpha(0), \beta(0)) = m(e,e) = e, \\ \gamma(1) &= m(\alpha(1), \beta(1)) = m(g,h) = gh. \end{aligned} \tag{10}$$

بنابراین منحنی پیوسته γ نقطه e را به نقطه gh وصل می کند و درنتیجه $gh \in G_0$.
هم چنین باید ثابت کنیم که معکوس هرعنصر $g \in G_0$ نیز درخود G_0 است. برای این کارکافی است که استدلال بالارادرمورد نگاشت زیر تکرارکنیم:

$$\alpha^{-1} : G \longrightarrow G, \qquad \alpha^{-1}(t) := i(\alpha(t)). \tag{11}$$

پیوسته بودن α و i به معنای پیوسته بودن α^{-1} است. هم چنین

$$\begin{aligned} &\alpha^{-1}(0) = i(\alpha(0)) = i(e) = e \\ &\alpha^{-1}(1) = i(\alpha(1)) = i(g) = g^{-1}. \end{aligned} \tag{12}$$

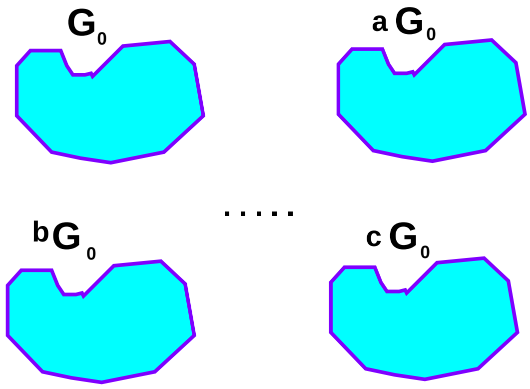
این استدلال نشان می دهد که g^{-1} نیز متعلق به G_0 است وبنابراین G_0 یک زیرگروهِ G است.

قضیه بعدی خاصیت مهم تروقوی تری را راجع به G_0 ثابت می کند.

قضیه: دریک گروه توپولوژیک، آن قسمت ازگروه که همبند مسیری با عنصر واحد است یعنی G_0 یک زیرگروه بهنجاراست.

اثبات: درقضیه قبل دیدیم که G_0 یک زیرگروه است. حال می خواهیم نشان دهیم که G_0 یک زیرگروه بهنجاراست. فرض کنیدکه $h \in G_0$ و $g \in G$. می خواهیم نشان دهیم که $ghg^{-1} \in G_0$. چون $h \in G_0$ نتیجه می گیریم که یک نگاشت پیوسته α (یک منحنی پیوسته) وجود دارد به قسمی که

$$\alpha : [0,1] \longrightarrow G_0 \quad \alpha(0) = e, \quad \alpha(1) = h. \tag{13}$$



شکل ۲: G_0 و هم مجموعه های آن بایکدیگر همانریخت هستند. ازجمله همه همبند مسیری هستند. G/G_0 نیز یک گروه گسسته است.

حال نگاشت زیررا درنظربگیرید: $\gamma(t) := g\alpha(t)g^{-1}$ یا به عبارت دقیق تر $\gamma(t) := m(g, m(\alpha(t), g^{-1})$. این نگاشت ترکیب نگاشت های پیوسته است و بنابراین پیوسته است. ضمناً این نگاشت از $[0, 1]$ به G است. حال دقت می کنیم که

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= g\alpha(0)g^{-1} = geg^{-1} = e, \\ \gamma(1) &= g\alpha(1)g^{-1} = ghg^{-1}. \end{aligned} \tag{14}$$

بنابراین مسیری پیوسته یافته ایم که ghg^{-1} را به e متصل می کند و این نشان می دهد که $ghg^{-1} \in G_0$. بنابراین G_0 یک زیرگروه بهنجار G است.

ازآنجا که G_0 یک زیرگروه بهنجارِ G است، می توان گروه خارج قسمت G/G_0 را بدست آورد. این گروه از هم مجموعه های G_0 تشکیل شده است. هرهم مجموعه یا کلاس را با یک عنصر نماینده آن نشان می دهیم مثل $[a]$ یا $[b]$ وغیره. قبلاً دیدیم که یک تناظریک به یک بین این کلاس ها برقراراست. نگاشت زیردرواقع این تناظریک به یک را برقرارمی کند.

$$\psi : [a] \equiv aG_0 \longrightarrow [b] \equiv bG_0, \qquad \psi(x) = ba^{-1}x \tag{15}$$

حال باتوجه به اینکه گروه G یک گروه توپولوژیک است ونگاشت فوق از نگاشت های پیوسته ضرب و وارون ترکیب شده است، نتیجه می گیریم که ψ یک نگاشت پیوسته ووارون پذیراست. این بدان معناست که کلاس های مختلف ازنظرتوپولوژیک بایکدیگر همانریخت هستند و همه همان خصوصیات توپولوژیکی را دارند که G_0 دارند، شکل (۲).

قضیه: هرهم مجموعه G_0 یک ناحیه هم بندمسیری است. یعنی هردونقطه آن را می توان بایک مسیر پیوسته به هم وصل کرد. برعکس هردو عضو گروه که بایک مسیر پیوسته به هم وصل شوند حتمادریک هم مجموعه

قراردارند.

اثبات: فرض کنید که a, b هردو متعلق به یک هم مجموعه باشند. دراین صورت یک $g \in G_0$ وجود دارد به قسمی که $b = ag$. اما می دانیم که g را می توان بایک مسیر پیوسته به عنصر واحد وصل کرد. یعنی

$$\exists \ \ \gamma(t) \ |\gamma(0) = e, \ \ \gamma(1) = g. \tag{16}$$

حال منحنی پیوسته $\eta(t) := a\gamma(t)$ را درنظرمی گیریم. این منحنی پیوسته است زیرا از ترکیب دو نگاشت پیوسته تشکیل شده است.
درضمن داریم

$$\eta(0) = a\gamma(0) = ae = a, \qquad \eta(1) = a\gamma(1) = ag = b. \tag{17}$$

پس منحنی پیوسته η ، عنصر a را به b وصل می کند. درنتیجه هرهم مجموعه یک ناحیه همبند مسیری است. حال معکوس قضیه را ثابت می کنیم. فرض کنید که دوعضو مثل c و d را بتوان بایک مسیر به هم متصل کرد. می خواهیم ثابت کنیم که هردو دریک هم مجموعه قراردارند. برای این کارباید ثابت کنیم که عضوی مثل $g \in G_0$ وجود دارد به قسمی که $d = cg$. امنحنی ای که c را به d وصل می کند با α نشان می دهیم. می دانیم که

$$\alpha(0) = c, \qquad \alpha(1) = d. \tag{18}$$

حال منحنی پیوسته $\beta(t) := c^{-1}\alpha(t)$ را درنظربگیرید. این منحنی پیوسته است زیرانگاشت های وارون و ضرب درگروه پیوسته هستند و α نیز بنابرفرض پیوسته است. درضمن داریم

$$\beta(0) = c^{-1}\alpha(0) = c^{-1}c = e, \qquad \beta(1) = c^{-1}\alpha(1) = c^{-1}d \tag{19}$$

درنتیجه منحنی β ، عضو $c^{-1}d$ را به عضو واحد گروه وصل می کند، پس $c^{-1}d \in G_0$. ولی این امر بدان معناست که یک $g \in G_0$ وجود دارد به قسمی که $d = cg$ یعنی اینکه c و d هم ارزهستند. بنابراین دریک هم مجموعه قراردارند. اثبات قضیه دراینجا کامل می شود.

نتیجه مهم این قضیه این است که هم مجموعه های زیرگروه G_0 ناحیه های جداازهمی را تشکیل می دهند و درنتیجه گروه خارج قسمت G/G_0 یک گروه گسسته است.

درنتیجه مطالعه همه گروه های پیوسته به مطالعه همه گروه های همبند مسیری و مطالعه همه گروه های گسسته کاهش پیدا می کند.

ازخواننده می خواهیم که باتوجه به آنچه که دردرس های قبلی آموخته است مثال های زیر را مطالعه وصحت روابط نوشته شده را تحقیق کند.

مثال ۱:

$$O(n)/SO(n) \equiv Z_2. \tag{20}$$

مثال ۲: در گروه تبدیلات $O(1,3)$، زیرگروه $O(1,3)^+_\uparrow$ قسمت متصل به عنصرواحد است.

$$O(1,3)/O(1,3)^+_\uparrow \equiv Z_2 \times Z_2. \tag{21}$$